

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Ченцов А.Г., Ченцов П.А.

Задачи маршрутизации перевозок с элементами декомпозиции и
возможности динамического программирования

Всероссийская научная конференция
и школа молодых ученых с международным участием
РИСК-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ЭКСПЛУАТАЦИИ СОЦИОТЕХНИЧЕСКИХ
ИНФРАСТРУКТУР РОМТПЭСИ-2026

Екатеринбург, Россия
28–30 мая 2026 г.

Введение

Рассматриваемые задачи имеют своим прототипом известную труднорешаемую задачу коммивояжёра. Допускаются ограничения предшествования и функции стоимости с зависимостью от списка заданий.

Исследуются задачи маршрутизации, ориентированные на проблемы транспортных перевозок с возобновляемыми ресурсами. Задаётся система мегаполисов, определяемых в виде непустых конечных множеств, очередность посещения которых оптимизируется наряду с оптимизацией самой траектории посещения, а также точки старта в условиях ограничений в виде неравенств на оценки внешних перемещений.

Эти ограничения могут возникать в авиационной логистике и соответствовать требованиям к дальности беспосадочного перелета. Предложен подход на основе широко понимаемого динамического программирования (ДП) при использовании штрафов в условиях аддитивного агрегирования затрат.

При ощутимой размерности возникающей задачи маршрутизации используется декомпозиция с поэтапным обслуживанием кластеров, позволяющая находить решение за приемлемое время. По постановке допускаются и иные ограничения — условия предшествования; допускается также применение функций стоимости с зависимостью от списка предстоящих заданий. Построен оптимальный алгоритм нахождения композиционного решения; он реализован на многоядерной ПЭВМ, проведен обширный вычислительный эксперимент.

Пример. 4 кластера по 25 мегаполисов и 17 адресных пар в каждом. Мегаполисы – круги радиуса 3 км, 8 портов. Точка старта выбирается на прямоугольнике, определяемом точками $(0,0)$, $(0,290)$, $(300,290)$, $(300,0)$ км. с шагом в 10 км.

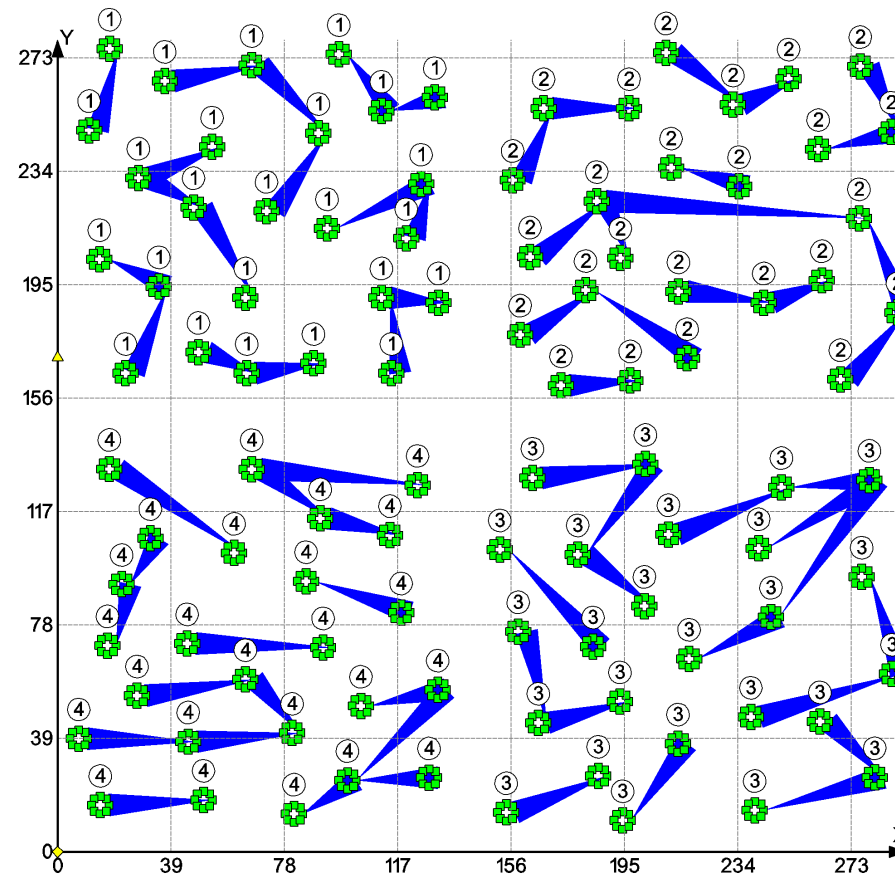


Рис 1. Условия предшествования, определяемые посредством адресных пар.

Пример. Первый вариант расчёта, при превышении дистанции в 50 км. используется штраф 1000000.
Результат счета: 1002774,5 км. Время счета: 33 сек. Координаты найденной точки старта (0,170) км.

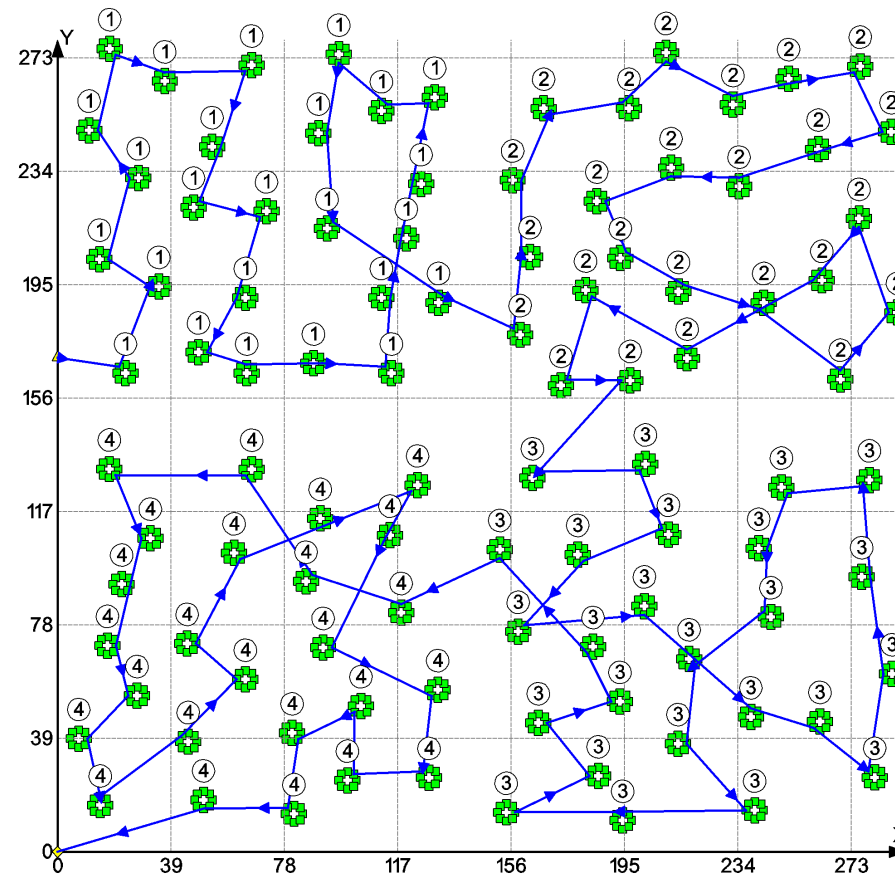


Рис 2. Первый вариант вычислений.

Пример. Второй вариант расчёта, при превышении дистанции в 55 км. используется штраф 1000000. Результат счета: 2747,8 км. Время счета: 31 сек. Координаты найденной точки старта (0,170) км.

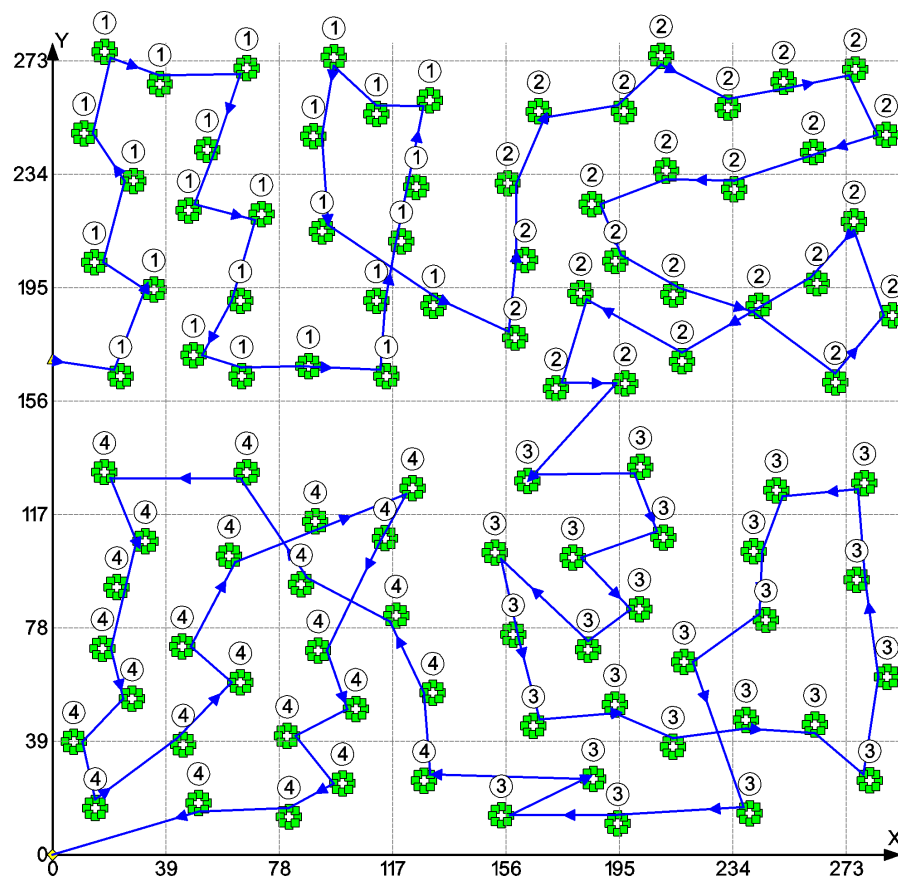


Рис 3. Второй вариант вычислений.

Общематематические сведения, элементы теории множеств

Множеству H соответствует семейство $\mathcal{P}(H)$ всех подмножеств (п/м) H , $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$; $\text{Fin}(H)$ — семейство всех непустых конечных п/м H , $\text{Fin}(H) \subset \mathcal{P}'(H)$. Используем известное [17, с.17] соглашение: для любых трех множеств A , B и C полагаем $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$; тогда при $s \in A \times B$ и $t \in C$ $(s, t) = (s_1, s_2, t) \in A \times B \times C$, где $s_1 \triangleq \text{pr}_1(s)$ и $s_2 \triangleq \text{pr}_2(s)$. Двум множествам P и Q сопоставляем $Q^P \triangleq \{g \in \mathcal{P}(P \times Q) \mid \forall p \in P \exists! q \in Q : (p, q) \in g\}$ (множество всех функций из P в Q). Если A и B — непустые множества, $C \in \mathcal{P}'(A)$ и $\varphi \in B^A$, то $\varphi^1(C) \triangleq \{\varphi(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}'(B)$ и $(\varphi \mid C) \triangleq (\varphi(x))_{x \in C} \in B^C$ (образ C при действии φ и сужение φ на множество C).

Как обычно, $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая); $\mathcal{R}_+[H] \triangleq (\mathbb{R}_+)^H$ для всякого непустого множества H есть множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на H . Полагаем $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$; при $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leq k) \& (k \leq q)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$$

Непустому конечному множеству K сопоставляется его мощность $|K| \in \mathbb{N}$, а также (непустое конечное) множество $(\text{bi})[K]$ всех биекций дискретного интервала (ДИ) $\overline{1, |K|}$ на множество K ; $|\emptyset| \triangleq 0$. Через $(\text{Vi})[H]$ обозначаем множество всех перестановок непустого множества H . Ясно, что при $m \in \mathbb{N}$ в виде $(\text{bi})[\overline{1, m}]$ имеем множество всех перестановок ДИ $\overline{1, m}$; при $\alpha \in (\text{bi})[\overline{1, m}]$ полагаем def, что $\alpha^{-1} \in (\text{bi})[\overline{1, m}]$ есть перестановка, обратная по отношению к α . Перестановки такого типа называем маршрутами. Кортежем именуем функцию, определенную на непустом п/м $\mathbb{N}_0$.

Специальные понятия и обозначения Фиксируем непустое множество X и $X^0 \in \text{Fin}(X)$ в качестве множества возможных точек старта. Пусть $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \geq 4$

$$(1) \quad M_1 \in \text{Fin}(X), \dots, M_{\mathbf{n}} \in \text{Fin}(X);$$

множества (1) именуем мегаполисами (м/п); кроме того, фиксируем отношения (см.[16, гл.II,§4])

$$(2) \quad \mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \dots, \mathbb{M}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{P}'(M_{\mathbf{n}} \times M_{\mathbf{n}}).$$

Полагаем в отношении м/п (1), что $(M_j \cap X^0 = \emptyset \ \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}) \& (M_p \cap M_q = \emptyset \ \forall p \in \overline{1, \mathbf{n}} \ \forall q \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \{p\})$. И так, м/п (1) попарно дизъюнкты и не содержат точек из X^0 .

Полагаем, что семейство

$$(3) \quad \mathcal{M} \triangleq \{M_i : i \in \overline{1, \mathbf{n}}\} \in \mathcal{P}'(\text{Fin}(X))$$

всех м/п подлежит посещению со стартом в X_0 . Очередность при этом может выбираться произвольно в пределах множества $\mathbf{P} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P})$, где $\mathbb{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, \mathbf{n}}]$. Элементы $\mathbf{P}$ — перестановки ДИ $\overline{1, \mathbf{n}}$ — называем допустимыми маршрутами, следуя традиции ЗК. Итак, выбор маршрута стеснен ограничением в виде непустого множества $\mathbf{P}$, $\mathbf{P} \subset \mathbb{P}$. Понимая под траекториями варианты посещения отношений (2), введем предварительно $\mathfrak{Z} \triangleq (X \times X)^{\overline{0, \mathbf{n}}}$. Тогда при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbf{P}$ имеем пучок

$$(4) \quad \mathcal{Z}_\alpha[x] \triangleq \{\mathbf{z} \in \mathfrak{Z} \mid (\mathbf{z}(0) = (x, x)) \& (\mathbf{z}(t) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \ \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}})\} \in \text{Fin}(\mathfrak{Z}).$$

Если $x \in X^0$, то в нашем распоряжении находятся и маршрут $\alpha \in \mathbf{P}$, и траектория из множества (4). В этой связи при $x \in X^0$ рассматриваем

$$(5) \quad \tilde{\mathbf{D}}[x] \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]\} \in \text{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z})$$

в качестве множества допустимых решений (ДР) с фиксированным стартом x . Наконец, триплеты из множества

$$(6) \quad \mathbf{D} \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0 \mid (\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]\} \in \text{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0)$$

называем маршрутными процессами (МП). Оптимизация аддитивного критерия в классе МП является нашей целью.

При $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$ имеем $\mathfrak{M}_j \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \text{Fin}(M_j)$ и $\mathbf{M}_j \triangleq \{\text{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \text{Fin}(M_j)$ в качестве множеств, элементами которых являются возможные пункты прибытия и отправления для м/п M_j ; $\mathbb{M}_j \subset \mathfrak{M}_j \times \mathbf{M}_j$. Тогда

$$(7) \quad \mathbb{X} \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathfrak{M}_i \in \text{Fin}(X), \bar{\mathbf{M}} \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_i, \mathbf{X} \triangleq \bar{\mathbf{M}} \cup X^0 \in \text{Fin}(X)).$$

С учетом (7) полагаем заданными функции стоимости (ФС)

$$(8) \quad \bar{\mathbf{c}} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}], \dots, \mathbf{c}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_{\mathbf{n}} \times \mathfrak{N}], \quad f \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}],$$

где $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n}})$; множества — элементы $\mathfrak{N}$ — называем списками.

Тогда при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbf{P}$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]$ имеем аддитивный критерий

$$(9) \quad \bar{\mathfrak{C}}_\alpha[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} [\bar{\mathbf{c}}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t, \mathbf{n}}))] + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}})).$$

Значения $\bar{\mathbf{c}}$ в (8) оценивают внешние перемещения, значения $c_1, \dots, c_{\mathbf{n}}$ — работы, связанные с посещением мегаполисов, а значения f — терминальное состояние получающегося МП $(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x)$. В качестве основной рассматриваем здесь задачу

$$(10) \quad \bar{\mathfrak{C}}_\gamma[\mathbf{z}] \longrightarrow \min, (\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D},$$

которой сопоставляются экстремум $\mathbf{V} \in \mathbb{R}_+$ и непустое экстремальное множество **SOL**:

$$(11) \quad \mathbf{V} \triangleq \min_{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}} \bar{\mathfrak{C}}_\gamma[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(12) \quad \mathbf{SOL} \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D} \mid \bar{\mathfrak{C}}_\gamma[\mathbf{z}] = \mathbf{V}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D}).$$

Кроме того, при $x \in X^0$ возникает задача с фиксированным стартом

$$(13) \quad \bar{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z}] \longrightarrow \min, (\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x],$$

которой сопоставляются экстремум $V[x] \in \mathbb{R}_+$ и непустое экстремальное множество **(sol)** $[x]$:

$$(14) \quad V[x] \triangleq \min_{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]} \bar{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(15) \quad (\mathbf{sol})[x] \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] \mid \bar{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z}] = V[x]\} \in \text{Fin}(\tilde{\mathbf{D}}[x]).$$

Тогда $\mathbf{V}$ есть (см.(6)) наименьшее из $V[x]$, $x \in X^0$. В этой связи сопоставим задаче

$$(16) \quad V[x] \longrightarrow \min, x \in X^0,$$

экстремальное множество $X_{\text{opt}}^0 \triangleq \{x \in X^0 \mid V[x] = \mathbf{V}\}$. Заметим, что при $x \in X_{\text{opt}}^0$ и $(\alpha, \mathbf{z}) \in (\mathbf{sol})[x]$ непременно $(\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{SOL}$.

Рассмотрим набор ФС (8) с одним изменением: фиксируем далее $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}]$ и рассматриваем кортеж ФС в качестве базового

$$(17) \quad \mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}], \dots, \mathbf{c}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_{\mathbf{n}} \times \mathfrak{N}], \quad f \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}]$$

Предполагаем, кроме того, что МП $(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}$ должен удовлетворять ограничению

$$(18) \quad \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}(t-1)), \text{pr}_1(\mathbf{z}(t)), \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}})) \leqslant \mathbf{d} \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}},$$

где $\mathbf{d} \in]0, \infty[$ — заданный допуск.

Замечание 3.1 Отметим один простой пример такой ситуации, связанный идейно с авиационной логистикой. Будем рассматривать м/п в (1) как системы населенных пунктов (НП), связанных возможностью произвольных перемещений (между НП мегаполиса) наземным транспортом. Полагаем, что при $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ значения функций $\mathbf{c}$ в (17) задаются евклидовыми расстояниями, опуская для простоты зависимость от списка заданий. Функции $c_1, \dots, c_{\mathbf{n}}, \mathbf{f}$ в (17) полагаем (для простоты) тождественно равными нулю. При этом считаем заданным $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n}} \times \overline{1, \mathbf{n}})$, для которого

$$(19) \quad \forall \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \exists z^0 \in \mathbf{K}^0 : \text{pr}_1(z^0) \neq \text{pr}_2(z) \forall z \in \mathbf{K}$$

Имеем в данном замечании, что (см.[18, раздел 2.3])

$$(20) \quad \mathbf{P} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \forall z \in \mathbf{K}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P});$$

в (22) использованы т.н. условия предшествования. При этом у/п из $\mathbf{K}$ называем адресными; у каждой адресной пары первый элемент называем отправителем, а второй — получателем. Считаем, что посредством адресных пар задается директивно набор требований в части грузоперевозок. Мы полагаем, что посещение м/п осуществляется транспортным средством (ТС); ТС может быть самолетом, вертолетом или беспилотным авиационным средством (БАС). Условие (18) может быть в данном случае связано с ограничением на дальность беспосадочного перелета (следствие дефицита топлива). Мы полагаем в примере, что $\mathbb{M}_j = \{(x, x) : x \in M_j\}$ при $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$. Итак, наше ТС по прибытии в м/п перезагружается, осуществляет заправку топливом и отправляется к следующему м/п.

Вернемся к общей постановке с ФС (17). Отметим, что

$$\begin{aligned}
 (21) \quad \mathbf{a} &\stackrel{\triangle}{=} \max_{h \in \mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}} \mathbf{c}(h) \in \mathbb{R}_+, \\
 a_1 &\stackrel{\triangle}{=} \max_{h \in \mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}} \mathbf{c}_1(h) \in \mathbb{R}_+, \dots, a_{\mathbf{n}} \stackrel{\triangle}{=} \max_{h \in \mathbb{M}_{\mathbf{n}} \times \mathfrak{N}} \mathbf{c}_{\mathbf{n}}(h) \in \mathbb{R}_+, \\
 a_{\mathbf{n}+1} &\stackrel{\triangle}{=} \max_{x \in \mathbf{M}} f(x) \in \mathbb{R}_+;
 \end{aligned}$$

получаем, как следствие, что определено значение

$$(22) \quad \mathbf{A} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{a}\mathbf{n} + \sum_{i=1}^{\mathbf{n}+1} a_i \in \mathbb{R}_+.$$

Теперь зафиксируем $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_+$ со свойством $\mathbf{A} < \mathbb{A}$; число $\mathbb{A}$ (22) будем использовать при введении штрафов как аналог бесконечности.

В виде

$$(23) \quad \mathbf{C} \triangleq \{h \in \mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N} \mid \mathbf{d} < \mathbf{c}(h)\}$$

имеем множество, на котором значения ФС $\mathbf{c}$ будут изменены: полагаем

$$(24) \quad (\bar{\mathbf{c}}(h) \triangleq \mathbb{A} \quad \forall h \in \mathbf{C}) \& (\bar{\mathbf{c}}(h) \triangleq \mathbf{c}(h) \quad \forall h \in (\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}) \setminus \mathbf{C}).$$

С учетом (24) мы получаем вариант (8), для которого реализуются (9) — (16). В то же время у нас при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbf{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]$ определено

$$(25) \quad \begin{aligned} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(z(t-1)), \text{pr}_1(z(t)), \alpha^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{\alpha(t)}(\mathbf{z}(t), \alpha^1(\overline{t, \mathbf{n}}))] \\ + f(\text{pr}_2(\mathbf{z}_{\mathbf{n}})) \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Если $x \in X^0$ и $\gamma \in \mathbf{P}$, то введем в рассмотрение множество

$$(26) \quad \mathcal{Z}_\gamma^0[x] \triangleq \{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\gamma[x] \mid \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}(t-1)), \text{pr}_1(\mathbf{z}(t)), \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}})) \leqslant \mathbf{d} \ \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}}\}$$

(выделены траектории, соблюдающие условие (18)). Ясно, что при $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbf{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\gamma^0[x]$

$$(27) \quad \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \bar{\mathfrak{C}}_\gamma[\mathbf{z}].$$

В то же время в силу (24), (26) при $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbf{P}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\gamma[x] \setminus \mathcal{Z}_\gamma^0[x]$ имеем, что

$$(28) \quad \exists t \in \overline{1, \mathbf{n}} : \bar{\mathbf{c}}(\text{pr}_2(\mathbf{z}(t-1)), \text{pr}_1(\mathbf{z}(t)), \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}})) = \mathbb{A}.$$

Как следствие, получаем (см.(22)), что

$$(29) \quad (\exists x \in X^0 \ \exists \gamma \in \mathbf{P} : \mathcal{Z}_\gamma^0[x] \neq \emptyset) \iff (\mathbf{V} < \mathbb{A}).$$

Учитывая эквивалентность (29) в вопросе о разрешимости (основной) задачи

$$(30) \quad \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \longrightarrow \min, (\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}, \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}(t-1)), \text{pr}_1(\mathbf{z}(t)), \alpha^1(\overline{t, \mathbf{n}})) \leqslant \mathbf{d} \ \forall t \in$$

рассматриваем далее в настоящем разделе случай, когда $\mathbf{V} < \mathbb{A}$.

Тогда в силу (17) $\exists x \in X^0 \quad \exists \gamma \in \mathbf{P} : \mathcal{Z}_\gamma^0[x] \neq \emptyset$. С учетом этого полагаем, что

$$(31) \quad \tilde{\mathbf{D}}^0[x] \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\gamma^0[x]\} \in \mathcal{P}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z}) \quad \forall x \in X^0.$$

Ясно, что $\tilde{X}^0 \triangleq \{x \in X^0 \mid \tilde{\mathbf{D}}^0[x] \neq \emptyset\} \in \mathcal{P}'(X^0)$ и, в частности, $\tilde{X}^0 \in \text{Fin}(X)$. Понятно (см.(5), (26), (31)), что $\tilde{\mathbf{D}}^0[x] \subset \tilde{\mathbf{D}}[x]$ при $x \in \tilde{X}^0$. Пусть

$$(32) \quad V^0 \triangleq \min_{x \in \tilde{X}^0} \min_{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}^0[x]} \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}].$$

Предложение 1 Справедливо равенство $V^0 = \mathbf{V}$.

Ориентируясь на использование (32), получаем
(33)

$$\mathbf{D}^0 \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times \tilde{X}^0 \mid (\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}^0[x]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times \tilde{X}^0).$$

Из (32) и (33) следует равенство

$$(34) \quad V^0 = \min_{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}^0} \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}];$$

$$(35) \quad \mathbf{SOL}^0 \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}^0 \mid \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = V^0\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D}^0)$$

(действительно, $\mathbf{D}^0$ — конечное множество). Сравним (12) и (35).

Предложение 2 Справедливо равенство $\mathbf{SOL}^0 = \mathbf{SOL}$.

В связи с задачей (30) можно наметить следующий алгоритм на функциональном уровне.

1) Используя (24), т.е. систему штрафов, свести постановку к (10), в которой ограничение (18) отсутствует.

2) Решить задачу (10) в конкретизации (24), после чего сравнить получившееся значение экстремума $\mathbf{V}$ с $\mathbb{A}$. Если $\mathbb{A} \leq \mathbf{V}$, то (см.(29)) принимается решение о неразрешимости задачи (30); при этом учитываются (26), (29). В случае $\mathbf{V} < \mathbb{A}$, построение продолжить.

3) Принять $\mathbf{V}$ в качестве экстремума задачи (30), учитывая предложения 1,2 и (34). Найденный ранее МП из **SOL** (12) принять в качестве решения задачи (30), имея в виду предложение 1.

Задачи маршрутизации с элементами декомпозиции

Итак, полагаем далее, что $\mathbf{n} \geq 4$, т.е. $\mathbf{n} \in \overrightarrow{4, \infty}$, а $\mathcal{M}$ (3) разбито в сумму кластеров $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r$, где $r \in \overrightarrow{2, \infty}$. Пусть данное разбиение реализовано посредством разбиения ДИ $\overline{1, \mathbf{n}}$: полагаем заданными $N_0 \in \overline{0, \mathbf{n}}, N_1 \in \overline{0, \mathbf{n}}, \dots, N_r \in \overline{0, \mathbf{n}}$ со свойствами

$$(36) \quad (N_0 = 0) \& (N_r = \mathbf{n}) \& (N_s + 2 \leq N_{s+1} \quad \forall s \in \overline{0, r-1}).$$

Пусть $I_j \triangleq \overline{N_{j-1} + 1, N_j}$ и $\mathcal{M}_j \triangleq \{M_t : t \in I_j\}$ при $j \in \overline{1, r}$. Тогда $\{I_j : j \in \overline{1, r}\}$ есть разбиение ДИ $\overline{1, \mathbf{n}}$ и, как следствие (см.(1)), $\{\mathcal{M}_j : j \in \overline{1, r}\}$ есть разбиение $\mathcal{M}$. Кластеры $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r$ подлежат обслуживанию в их естественной упорядоченности: сначала $\mathcal{M}_1$, затем $\mathcal{M}_2$ и т.д. Обслуживание каждого кластера состоит в посещении всех входящих в него м/п с возможным выполнением работ, именуемых внутренними.

Замечание 4.1.

Сейчас рассмотрим развитие примера в замечании 3.1. Итак, при $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и функции $\mathbf{c}$ (17), определяемой системой евклидовых расстояний, предполагаем, что кластеры $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r$ отвечают отдельным регионам, которые наше ТС (например, БАС) должно обслуживать последовательно с учетом их особенностей. Как и в замечании 3.1, предполагаем сейчас зануление $c_1, \dots, c_n$, f и диагональную структуру отношений $\mathbb{M}_1, \dots, \mathbb{M}_r$. Единые ограничения предшествования заменим сейчас системой “местных” ограничений, формируемых с помощью множеств $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_r$, элементами которых являются адресные пары. Смысл $\mathbf{d}$ -ограничения соответствует замечанию 3.1. Цель исследования может быть связана с проблемой наискорейшего посещения всех м/п. Отметим, однако, одно возможное усложнение постановки: использование в качестве $\mathbf{c}$ функции с зависимостью от списка заданий может помочь в вопросах, связанных с учетом загрузки ТС, что влияет на режим полета. $\square$

Напомним, что $\mathbb{P} = (\text{bi})[\overline{1, \mathbf{n}}]$. Фиксируем

$$(37) \quad (\mathbf{K}_j)_{j \in \overline{1, r}} \in \prod_{j=1}^r \mathcal{P}(\overline{1, N_j - N_{j-1}} \times \overline{1, N_j - N_{j-1}});$$

при $s \in \overline{1, r}$ у/п из $\mathbf{K}_s$, $\mathbf{K}_s \subset \overline{1, N_s - N_{s-1}} \times \overline{1, N_s - N_{s-1}}$, называем адресными. Пусть

$$(38) \quad \forall j \in \overline{1, r} \quad \forall \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_j) \exists z^0 \in \mathbf{K}^0 : \text{pr}_1(z^0) \neq \text{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}^0;$$

в [18, часть 2] указаны конкретные варианты реализации (38). При $j \in \overline{1, r}$ получаем, что

$$(39) \quad \mathcal{A}_j \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P}_j \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}_j\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_j),$$

где $\mathbb{P}_j \triangleq (\text{bi})[\overline{1, N_j - N_{j-1}}]$; в связи со свойством непустоты $\mathcal{A}_j$ (39) см. [18, часть 2].

При $k \in \overline{1, r}$ и $(\alpha_j)_{j \in \overline{k, r}} \in \prod_{j=k}^r \mathcal{A}_j$ определяем перестановку $\diamond_{j=k}^r \alpha_j \in \mathbb{P}^{(k)}$ для $\overline{N_{k-1} + 1, \mathbf{n}}$ условиями: $\forall s \in \overline{k, r} \quad \forall t \in I_s$

$$(40) \quad (\diamond_{j=k}^r \alpha_j)(t) \triangleq \alpha_s(t - N_{s-1}) + N_{s-1}.$$

Ясно, что при $k \in \overline{1, r}$ в виде

$$(41) \quad \mathcal{A}^{(k)} \triangleq \{ \diamond_{j=k}^r \alpha_j : (\alpha_j)_{j \in \overline{k, r}} \in \prod_{j=k}^r \mathcal{A}_j \}$$

имеем непустое множество.

В связи с (40), (41) важен случай $k = 1$: в виде

$$(42) \quad \mathcal{A} \triangleq \mathcal{A}^{(1)} = \{ \diamond_{j=1}^r \alpha_j : (\alpha_j)_{j \in \overline{1, r}} \in \prod_{j=1}^r \mathcal{A}_j \} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P})$$

имеем множество всех композиционных маршрутов. Полагаем в дальнейшем, что

$$(43) \quad \mathbf{P} \triangleq \mathcal{A}.$$

Посредством (4) определены траектории. Сейчас, однако, имеет смысл (как и в связи с (43)) представить (8) как вариант более общей конструкции, для ведения которой нам понадобятся вспомогательные конечные п/м X и $X \times X$. Сначала введем при $j \in \overline{1, r}$ множество

$$(44) \quad \tilde{\mathbf{K}}_j \triangleq \{ \text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}_j \} \in \mathcal{P}(\overline{1, N_j - N_{j-1}}).$$

С учетом (44) и определений раздела 2 полагаем, что

$$(45) \quad (X_1^0 \triangleq X^0) \& (X_j^0 \triangleq \bigcup_{k \in \overline{1, N_{j-1} - N_{j-2}} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_{j-1}} \mathbf{M}_{N_{j-2} + k} \quad \forall j \in \overline{2, r+1}),$$

Получаем в виде $(X_j^0)_{j \in \overline{1, r}}$ стартовые множества частичных задач. При этом $X_j^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{X})$ для $j \in \overline{1, r}$ (см. [18, §4.9]); учитываем (7). Далее, пусть $\tilde{\mathbf{z}}_j \triangleq (X \times X)^{\overline{0, \mathbf{n} - N_{j-1}}}$ при $j \in \overline{1, r}$; получаем множество кортежей в $X \times X$. Тогда при $k \in \overline{1, r}$, $x \in X_k^0$ и $\alpha \in \mathcal{A}^{(k)}$

$$(46) \quad \begin{aligned} \mathbb{Z}_k(x; \alpha) &\triangleq \{\mathbf{z} \in \tilde{\mathbf{z}}_k \mid (\mathbf{z}(0) = (x, x)) \\ &\&(\mathbf{z}(t - N_{k-1}) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{N_{k-1} + 1, \mathbf{n}})\} \in \text{Fin}(\tilde{\mathbf{z}}_k). \end{aligned}$$

При $k \in \overline{1, r}$ и $x \in X_k^0$ имеем множество

$$(47) \quad \mathcal{D}_k[x] \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}^{(k)} \times \tilde{\mathbf{z}}_k \mid \mathbf{z} \in \mathbb{Z}_k(x; \alpha)\} \in \text{Fin}(\mathcal{A}^{(k)} \times \tilde{\mathbf{z}}_k).$$

Случай $k = 1$ особенно важен: при $x \in X_1^0$ и $\alpha \in \mathcal{A}$ имеем в силу (4), (42), (43), что $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbf{P}$ и $\mathcal{Z}_\alpha[x] = \mathbb{Z}_1(x; \alpha)$. Кроме того, при $x \in X^0$ с учетом (4) получаем равенство

$$(48) \quad \tilde{\mathbf{D}}[x] = \mathcal{D}_1[x]$$

для множества всех ДР раздела 2 в задаче с фиксированным стартом. Наконец, из (6) и (48) вытекает, что

$$(49) \quad \mathbf{D} = \{(\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0 \mid (\alpha, \mathbf{z}) \in \mathcal{D}_1[x]\} \in \text{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0)$$

есть множество всех композиционных МП в задаче (10). Мы следуем принятым соглашениям относительно ФС (8); используем также конкретизацию (24). В качестве основной рассматриваем задачу (30). Однако, с учетом (29) и предложений 3.1 — 3.2 все сводится к варианту (10). Поэтому сосредоточимся на решении последней задачи при условии (43). Используем конструкции, касающиеся применения раздельного ДП в схеме с декомпозицией. Отметим, что в [20, 21] приведено подробное обоснование оптимальности предложенного алгоритма для случая $r = 2$.

Частичные задачи маршрутизации умеренной размерности, отвечающие обслуживанию каждого из семейств $\mathcal{M}_j$, $j \in \overline{1, r}$. При $j \in \overline{1, r}$ полагаем $\mathfrak{Z}_j^\natural = (X \times X)^{\overline{0, N_j - N_{j-1}}}$; при $x \in X_j^0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_j$ множество

$$(50) \quad \mathcal{Z}_{j, \alpha}^\natural[x] \triangleq \{\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_j^\natural \mid (z(0) = (x, x)) \text{ и } (\mathbf{z}(t) \in \mathbb{M}_{N_{j-1} + \alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1, N_j - N_{j-1}})\} \in \text{Fin}(\mathfrak{Z}_j^\natural)$$

(пучок траекторий) таково, что

$$(51) \quad \text{pr}_2(z_{N_j - N_{j-1}}) \in X_{j+1}^0 \quad \forall (z_t)_{t \in \overline{0, N_j - N_{j-1}}} \in \mathcal{Z}_{j, \alpha}^\natural[x].$$

В терминах (50), (51) при $j \in \overline{1, r}$ и $x \in X_j^0$ рассматриваем

$$(52) \quad \mathbb{D}_j^\natural[x] \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}_j \times \mathfrak{Z}_j^\natural \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{j, \alpha}^\natural[x]\} \in \text{Fin}(\mathcal{A}_j \times \mathfrak{Z}_j^\natural) :$$

множество допустимых решений (ДР) задачи обслуживания м/п из $\mathcal{M}_j$ со стартом в x .

Пусть $\mathfrak{N}_j^{\natural} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N_j - N_{j-1}})$ при $j \in \overline{1, r}$; введены семейства списков в частичных задачах. При $K \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ и $m \in \mathbb{N}_0$ имеем, что $K \oplus m \triangleq \{k + m : k \in K\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$. Тогда

$$(53) \quad K \oplus N_{j-1} \in \mathcal{P}'(I_j) \quad \forall j \in \overline{1, r} \quad \forall K \in \mathfrak{N}_j^{\natural}.$$

Для последующего введения ФС в частичных задачах полагаем при $j \in \overline{1, r}$

$$(\mathbb{X}_j^{\natural} \triangleq \bigcup_{t \in I_j} \mathfrak{M}_t) \& (\mathbf{X}_j^{\natural} \triangleq (\bigcup_{t \in I_j} \mathbf{M}_t) \cup X_j^0),$$

получая непустые конечные множества, $\mathbb{X}_j^{\natural} \subset \mathbb{X}$ и $\mathbf{X}_j^{\natural} \subset \mathbf{X}$ (см.(7)).

Переходя к ФС частичных задач, полагаем при $j \in \overline{1, r}$ ФС $\bar{\mathbf{c}}_j^{\natural} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}_j^{\natural} \times \mathbb{X}_j^{\natural} \times \mathfrak{N}_j^{\natural}]$ есть

$$(54) \quad \bar{\mathbf{c}}_j^{\natural}(x, y, K) = \bar{\mathbf{c}}(x, y, (K \oplus N_{j-1}) \cup \overline{N_j + 1, \mathbf{n}}) \\ \forall x \in \mathbf{X}_j^{\natural}, \quad \forall y \in \mathbb{X}_j^{\natural} \quad \forall K \in \mathfrak{N}_j^{\natural}.$$

Далее, при $j \in \overline{1, r}$ и $k \in \overline{1, N_j - N_{j-1}}$ ФС $c_{j,k}^{\natural} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_{N_{j-1}+k} \times \mathfrak{N}_j^{\natural}]$ такова, что

$$(55) \quad c_{j,k}^{\natural}(z, K) \triangleq c_{N_{j-1}+k}(z, (K \oplus N_{j-1}) \cup \overline{N_j + 1, \mathbf{n}})$$

Наряду с (54), (55) будем использовать подобно (9) те или иные терминальные компоненты аддитивных критериев частичных задач. Для большей краткости полагаем при $j \in \overline{1, r}$ и $k \in \overline{1, N_j - N_{j-1}}$, что

$$(56) \quad (M_k^{(j)} = M_{N_{j-1}+k}) \& (\mathbb{M}_k^{(j)} \triangleq \mathbb{M}_{N_{j-1}+k}) \\ \& (\mathfrak{M}_k^{(j)} \triangleq \mathfrak{M}_{N_{j-1}+k}) \& (\mathbf{M}_k^{(j)} \triangleq \mathbf{M}_{N_{j-1}+k}).$$

Используя (56), полагаем, что при $j \in \overline{1, r}$

$$(57) \quad \bar{\mathbf{M}}_j \triangleq \bigcup_{k=1}^{N_j - N_{j-1}} \mathbf{M}_k^{(j)}.$$

С учетом (56), (57) полагаем при $j \in \overline{1, r}$, $g \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}_j]$, $x \in X_j^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_j$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{j, \alpha}^{\natural}[x]$, что

$$(58) \quad \begin{aligned} \hat{\mathfrak{C}}_{\alpha}^{(j)}[\mathbf{z} \mid g] &\triangleq \sum_{t=1}^{N_j - N_{j-1}} [\bar{\mathbf{c}}_j^{\natural}(\text{pr}_2(z(t-1)), \text{pr}_1(\mathbf{z}(t)), \alpha^1(\overline{t, N_j - N_{j-1}})) \\ &\quad + c_{j, \alpha(t)}^{\natural}(\mathbf{z}(t), \alpha^1(\overline{t, N_j - N_{j-1}}))] + g(\text{pr}_2(\mathbf{z}(N_j - N_{j-1}))). \end{aligned}$$

С учетом (58) получаем при $j \in \overline{1, r}$, $x \in X_j^0$ и $g \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}_j]$ задачу

$$(59) \quad \hat{\mathfrak{C}}_\alpha^{(j)}[\mathbf{z} \mid g] \longrightarrow \min, (\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbb{D}_j^\natural[x],$$

для которой определены экстремум $\hat{\mathbb{V}}_j^\natural[g; x]$ и экстремальное множество $(\text{Sol})_j^\natural[g; x]$:

$$(60) \quad \hat{\mathbb{V}}_j^\natural[g; x] \triangleq \min_{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbb{D}_j^\natural[x]} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha^{(j)}[\mathbf{z} \mid g] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(61) \quad (\text{Sol})_j^\natural[g; x] \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbb{D}_j^\natural[x] \mid \hat{\mathfrak{C}}_\alpha^{(j)}[\mathbf{z} \mid g] = \hat{\mathbb{V}}_j^\natural[g; x]\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{D}_j^\natural[x]).$$

Терминальные компоненты критериев (58) определяем индуктивно, начиная со случая $j = r$.

Определена ФС $\bar{f} \triangleq (f \mid \bar{\mathbf{M}}_r) \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}_r]$ (см.(7), (8)). Полагаем $v_r \triangleq \bar{f}$, получая $v_r \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}_r]$. Дальнейшие определения реализуются по правилу: если $j \in \overline{2, r}$ и функция $v_j \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}_j]$ уже известна, то $v_{j-1} \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}_{j-1}]$ определяется условиями

(62)

$$(v_{j-1}(x) \triangleq \hat{V}_j^\natural[v_j; x] \quad \forall x \in X_j^0) \& (v_{j-1}(x) \triangleq 0 \quad \forall x \in \bar{\mathbf{M}}_{j-1} \setminus \mathbf{X}_j^0).$$

(легко видеть, что $\mathbf{X}_j^0 \subset \bar{\mathbf{M}}_{j-1}$ при $j \in \overline{2, r+1}$; см.[?, (8.6)]). Итак, намечена рекуррентная процедура $(v_r = \bar{f}) \longrightarrow v_{r-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow v_1$. Упомянутые функции v_j , $j \in \overline{1, r}$, используем в качестве терминальных компонентов в (58): $g = v_1, g = v_2, \dots, g = v_r$. Мы имеем также $v_0 \triangleq (\hat{V}_1^\natural[v_1; x])_{x \in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0]$, получая задачу

(63)

$$v_0(x) \longrightarrow \min, x \in X^0,$$

с экстремумом $\mathbb{V}_0$ и экстремальным множеством $\mathbb{X}_{\text{opt}}^0$:

$$(64) \quad \mathbb{V}_0 \triangleq \min_{x \in X^0} v_0(x) = \min_{x \in X^0} \hat{V}_1^{\natural}[v_1; x] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(65) \quad \mathbb{X}_{\text{opt}}^0 \triangleq \{x \in X^0 \mid v_0(x) = \mathbb{V}_0\} \in \mathcal{P}'(X^0).$$

Динамическое программирование в частичных задачах, 1
 Рассмотрим решение задачи (59) в том ее варианте, который соответствует рекуррентному построению $v_1, \dots, v_r$. Итак, фиксируем $j \in \overline{1, r}$ в настоящем разделе; речь пойдет о задаче (59), где g определяется посредством v_j . Итак, полагаем в (59), что $g = v_j$, приходя к (60), (61) в данной конкретизации. Напомним совсем кратко процедуру [?, §11], имея своей ближайшей задачей построение v_{j-1} , для чего достаточно (см.(62)) определить $\hat{V}_j^{\natural}[v_j; x] \in \mathbb{R}_+$ при $x \in X_j^0$. Итак, мы ориентируемся на построение функции

$$(66) \quad \hat{\mathbb{V}}_j^{\natural}[v_j; \cdot] \triangleq (\hat{\mathbb{V}}_j^{\natural}[v_j; x])_{x \in X_j^0} \in \mathcal{R}_+[X_j^0],$$

считая известной v_j .

ВВОДИМ

$$v_{j,0}^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_{j,0}^{\natural}], v_{j,1}^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_{j,1}^{\natural}], \dots v_{j,N_j-N_{j-1}}^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_{j,N_j-N_{j-1}}^{\natural}],$$

В $v_{j,0}^{\natural}(x, \emptyset) = v_j(x)$ при $x \in X_{j+1}^0$; $v_{j,0}^{\natural}$ используется в качестве начального элемента

$$(67) \quad v_{j,0}^{\natural} \longrightarrow v_{j,1}^{\natural} \longrightarrow \dots \longrightarrow v_{j,N_j-N_{j-1}}^{\natural},$$

регулярный шаг определяется правилом: если $s \in \overline{1, N_j - N_{j-1}}$ и функция $v_{j,s-1}^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_{j,s-1}^{\natural}]$ уже построена, то

$$(68) \quad \begin{aligned} v_{j,s}^{\natural}(x, K) &\triangleq \min_{t \in \mathbf{I}_j^{\natural}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_t^{(s)}} [\bar{\mathbf{c}}_j^{\natural}(x, \text{pr}_1(z), K) \\ &+ c_{j,t}^{\natural}(z, K) + v_{j,s-1}^{\natural}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{t\})] \quad \forall (x, K) \in D_{j,s}^{\natural}. \end{aligned}$$

Итак (см. (68)), реализуется процедура (67), финалом которой будет (66):

$$(69) \quad v_{j, N_j - N_{j-1}}^{\natural}(x, \overline{1, N_j - N_{j-1}}) = \hat{V}_j^{\natural}[v_j; x] \quad \forall x \in X_j^0.$$

Используя (62) и (69), мы определяем v_{j-1} . С практической точки зрения для результативности вышеупомянутой процедуры (67), реализующий переход $v_j \rightarrow v_{j-1}$, требуется, чтобы $\mathcal{M}_j$ -задача имела умеренную регулярность.

Далее, $v_r = \bar{f}$ и, как легко проверить, при $x \in X_r^0$ имеем

$$(70) \quad v^{(r)}[x] = \hat{\mathbb{V}}_r^{\natural}[\bar{f}; x] = \hat{\mathbb{V}}_r^{\natural}[v_r; x],$$

$$(71) \quad \mathbb{D}^{(r)}[x] = \{([\alpha], \mathbf{z}) : (\alpha, \mathbf{z}) \in (\text{Sol})_r^{\natural}[\bar{f}; x]\}.$$

В (70) имеем представления “крайних” функций экстремума; полагаем далее, что $v^{(j)}[\cdot] \triangleq (v^{(j)}[x])_{x \in X_j^0} \in \mathcal{R}_+[X_j^0]$ при $j \in \overline{1, r}$. С учетом (62) устанавливается следующее

Предложение 4 Если $k \in \overline{1, r-1}$, то истинна импликация

$$\begin{aligned} (v^{(k+1)}[x] = \hat{\mathbb{V}}_{k+1}^{\natural}[v_{k+1}; x] \quad \forall x \in X_{k+1}^0) \\ \implies (v^{(k)}[x] = \hat{\mathbb{V}}_k^{\natural}[v_k; x] \quad \forall x \in X_k^0). \end{aligned}$$

Тогда (см.раздел 5) имеем, в частности, что

$$(72) \quad v^{(1)}[x] = v_0[x] = \hat{\mathbb{V}}_1^{\natural}[v_1; x] \quad \forall x \in X^0.$$

С другой стороны, имеем, а потому $v_0[x] = V[x]$ при $x \in X^0$. Как следствие,

$$(73) \quad \mathbb{V}_0 = \mathbf{V}$$

(см.(6), (14), (64)). Из (65) и (73) получаем цепочку равенств

$$(74) \quad \begin{aligned} X_{\text{opt}}^0 &= \{x \in X^0 \mid v_0[x] \\ &= \mathbf{V}\} = \{x \in X^0 \mid V[x] = \mathbf{V}\} = \mathbb{X}_{\text{opt}}^0 \in \mathcal{P}'(X^0); \end{aligned}$$

получили (см.(16)) экстремальное множество задачи (63). Итак, оптимальность старта в основной задаче и его оптимальность в частичной $\mathcal{M}_1$ -задаче — эквивалентные свойства.

Последовательно оптимальные решения. Динамическое программирование в частичных задачах, 2

Основной алгоритм.

1) Для задачи (30) в конкретизации (43) выполнить преобразование (24), реализующее вспомогательную задачу (10).

2) В задаче (10) для $j \in \overline{1, r}$ построить $\tilde{\mathbf{K}}_j$ (44); при $j \in \overline{1, r+1}$ построить X_j^0 (45), создавая для частичной $\mathcal{M}_j$ -задачи множество возможных точек старта.

3) Для частичной $\mathcal{M}_r$ -задачи построить существенные списки заданий, слои позиций и слои функции Беллмана, следуя конструкциям §6 и полагая $v_r = \bar{f}$. В виде $v_{r, \mathbf{n} - N_{r-1}}^{\natural}$ определить $\hat{\mathbb{V}}_r^{\natural}[v_r; \cdot] = \hat{\mathbb{V}}_r^{\natural}[\bar{f}; \cdot]$ (см.(66)).

4) Если $j \in \overline{2, r-1}$ и уже построены v_{j+1} и $\mathbb{V}_{j+1}^{\natural}[v_{j+1}; \cdot]$, определить v_j , используя схему (62). Затем для частичной $\mathcal{M}_j$ -задачи с терминальной компонентой аддитивного критерия в виде v_j выполнить построение §6, реализующие слои позиций и функции Беллмана. В финале построений получить функцию экстремума $\mathcal{M}_j$ -задачи.

5) Прделаав процедуру предыдущего этапа для всех $j \in \overline{2, r-1}$, построить функцию экстремума $\mathcal{M}_2$ -задачи и терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_1$ -задачи в виде v_1 (см.(62)). После этого использовать схему §6 при $j = 1$, включая построение слоев позиций и функции Беллмана. В частности, определить $\hat{V}_1^{\natural}[v_1; \cdot]$, экстремум V_0 и (см.(73)) $\mathbf{V} \in \mathbb{R}_+$. Если $\mathbb{A} \leq \mathbf{V}$, то делается вывод о неразрешимости задачи (30). В случае $\mathbf{V} < \mathbb{A}$ построения продолжить и выбрать $\mathbf{x}^0 \in X_{\text{opt}}^0$. Определено $V^0 = \mathbf{V}$.

6) Принять $\mathbf{x}^0$ в качестве точки старта в частичной $\mathcal{M}_1$ -задаче; $\mathbf{x}_1^0 \triangleq \mathbf{x}^0$. Полагая $j = 1$ и $x_* = \mathbf{x}^0$, построить оптимальное в $\mathcal{M}_1$ -задаче ДР, т.е. у/п $(\theta_1, (\mathbf{y}_i^{(1)})_{i \in \overline{0, N_1}}) \in (\text{Sol})_1^{\natural}[v_1; \mathbf{x}^0]$.

7) Принять $\text{pr}_2(\mathbf{y}_{N_1}^{(1)})$ в качестве точки старта в $\mathcal{M}_2$ -задаче: полагать $x_2^0 \triangleq \text{pr}_2(\mathbf{y}_{N_1}^{(1)})$. Приступить к решению $\mathcal{M}_2$ -задачи со стартом x_2^0 .

8) Если $k \in \overline{1, r-1}$ и уже построены кортежи

$$(x_j^0)_{j \in \overline{1, k}} \in \prod_{j=1}^k X_j^0, ((\theta_j, (\mathbf{y}_i^{(j)})_{i \in \overline{0, N_j - N_{j-1}}}))_{j \in \overline{1, k}} \in \prod_{j=1}^k (\text{Sol})_j^{\natural}[v_j; \mathbf{x}_j^0]$$

со свойством

$$x_j^0 = \text{pr}_2(\mathbf{y}_{N_{j-1} - N_{j-2}}^{(j)}) \quad \forall j \in \overline{1, k} \setminus \{1\}$$

принять, что $x_{k+1}^0 \triangleq \text{pr}_2(\mathbf{y}_{N_k - N_{k-1}}^{(k)})$, получая $x_{k+1}^0 \in X_{k+1}^0$. Применяя вышеизложенную схему при $j = k+1$ и $x_* = x_{k+1}^0$, построить оптимальное ДР в $\mathcal{M}_{k+1}$ -задаче. т.е.

$$(\theta_{k+1}, (\mathbf{y}_i^{(k+1)})_{i \in \overline{0, N_{k+1} - N_k}}) \in (\text{Sol})_{k+1}^{\natural}[v_{k+1}; \mathbf{x}_{k+1}^0].$$

9) После построения всех ДР в частичных задачах, т.е. после реализации

$$((\theta_j, (\mathbf{y}_i^{(j)})_{i \in \overline{0, N_j - N_{j-1}}}))_{j \in \overline{1, r}} \in \prod_{j=1}^r (\text{Sol})_j^{\natural}[v_j; \mathbf{x}_j^0],$$

осуществить склеивание, получая

$$\vartheta \triangleq \diamond_{j=1}^r \theta_j \in \mathcal{A}, y \triangleq \square_{j=1}^r (\mathbf{y}_i^{(j)})_{i \in \overline{0, N_j - N_{j-1}}} \in \mathcal{Z}_{\vartheta}[x^0]$$

и, в виде $(\vartheta, y, \mathbf{x}^0) \in \mathbf{D}$, ПО композиционный МП, т.е. $(\vartheta, y, x^0) \in \mathbb{D}_{\text{co}}$; как следствие, $(\vartheta, y, x^0) \in \mathbf{SOL}$, а потому (при условии $\mathbf{V} < \mathbb{A}$) $(\vartheta, y, x^0) \in \mathbf{SOL}^0$ в силу предложения 2

Модельный пример Рассмотрим развитие примера, приведенного в замечаниях 3.1 и 4.1, на случай задач ощутимой размерности и возможность применения алгоритма 1) — 9) для их решения. С практической точки зрения речь пойдет о задаче “нулевого приближения”: рассматриваем случай евклидовой задачи на плоскости $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, когда значения $\mathbf{c}$ определяются евклидовыми расстояниями, зависимость от списка заданий отсутствует, отношения $\mathbb{M}_1, \dots, \mathbb{M}_{\mathbf{n}}$ имеют диагональную структуру (см. замечание 3.1), функции $c_1, \dots, c_{\mathbf{n}}, f$ тождественно равны нулю; относительно ТС полагаем, что в данном примере это БАС. Как и в замечании 4.1, полагаем, что кластеры $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r$ соответствуют отдельным регионам, в которых имеются свои ограничения предшествования, реализуемые посредством адресных пар из множеств $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_r$.

Список литературы

- [1] Ченцов А.Г., Ченцов А.А. Динамическое программирование и вопросы разрешимости задачи маршрутизации «на узкие места» с ресурсными ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Вып. 4 С.569–592.
- [2] Ченцов А.Г. Задача маршрутизации «на узкие места» с системой первоочередных заданий // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С.156-186.
- [3] Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Сесекин А.Н. Динамическое программирование в задаче курьера на узкие места с применением в авиационной логистике // Управление и обработка информации в технических системах : (Материалы XVIII Всероссийской научно-практической конференции; XIV молодёжной школы-семинара, посвящается памяти Почетного члена Оргкомитета Конференции, водителя первого лунохода, генерал-майора Дов-

ганя В.Г., 3-7 апреля 2023, Домбай, Карачаево-Черкесской Республики. Таганрог, 2023. С.34-44.

- [4] Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, № 137. С.95-124.
- [5] Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Экстремальная двухэтапная задача маршрутизации и процедуры на основе динамического программирования // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, N 2. С. 215–248.
- [6] Ченцов А.Г.. Ченцов П.А. Двухэтапное динамическое программирование в задаче маршрутизации с элементами декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 2023. № 5. С.133–164.
- [7] Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Сесекин А.Н. Задачи маршрутизации перемещений с неаддитивным агрегированием затрат. Москва : URSS, 2020. - 232 с.

- [8] Сергеев С.И. Алгоритмы решения минимаксной задачи коммивояжера. I. Подход на основе динамического программирования // Автоматика и телемеханика. 1995. № 7. С.144–150.
- [9] Маламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. №9. С.3–34.
- [10] Gutin G., Punnen A.P. The Traveling Salesman problem and its variations. Berlin: Springer. 2002. 850 p.
- [11] Cook W.J. In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation. Princeton University. 2012. 228 p.
- [12] Гимади Э.Х., Хачай М.Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ. 2016. 216 с.
- [13] Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере. Экономика и математические методы, 1965, Т.1. Вып. 1, С.94–107.

- [14] Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере. Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964, Т.9, С.219–228.
- [15] Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения. Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964, Т.9, С.202–218.
- [16] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
- [17] Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
- [18] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.:Наука. 1977.
- [19] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ М.: МЦНМО. 2000.
- [20] Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. Ижевск: Ижевский институт

компьютерных исследований, 2008.

- [21] Ченцов А. Г., Ченцов А. А. К вопросу о нахождении значения маршрутной задачи с ограничениями // Проблемы управления и информатики. 2016. № 1. С. 41–54.

СПАСИБО